Раздел 2. Тема 5. Занятие 2.

1°. Если $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = du$,

где $u = u(x,y,z)$ – однозначная функция в области V, то независимо от вида кривой C, целиком расположенной в области V, имеем:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

где (x_1, y_1, z_1) – начальная и (x_2, y_2, z_2) – конечная точка пути.

В простейшем случае, если область V односвязна и функции P, Q и R обладают непрерывными частными производными первого порядка, для этого необходимо и достаточно, чтобы в области V были выполнены условия:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

В простейшем случае параллелепипедной области V, функцию u можно найти по формуле

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz + C,$$

где (x_0, y_0, z_0) – фиксированная точка области V и C – произвольная постоянная.

2°. Если C – замкнутый простой кусочно гладкий контур, ограничивающий конечную односвязную область S, пробегаемый так, что область S остаётся слева, и функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $P'_y(x,y)$ и $Q'_x(x,y)$ в области S и на её границе, то имеет место формула Грина:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Эта формула справедлива и для конечной области S, ограниченной несколькими простыми контурами, если под границей

C последней понимать сумму всех граничных контуров, направление обхода которых выбирается так, что область S остается слева.

3°. Площадь S фигуры, ограниченной простым кусочно гладким контуром C равна

$$S = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) .$$

Класс: №№ 4263, 4266, 4299, 4303, 4307, 4309, 4312

№4263 Найти $I = \int\limits_{(2;1)}^{(1;2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$.

$$P = \frac{y}{x^2},\ Q = -\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2};\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u(x,y) = -\frac{y}{x} + C(y) \\ u'_y = -\frac{1}{x} + C'(y) = -\frac{1}{x} \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C. \end{array}$$

$$u(x,y) = -\frac{y}{x} + C \Rightarrow$$

$$I = u(1;2) - u(2;1) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

№4266 Найти $I = \int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

$$\begin{cases} P = x^4 + 4xy^3 \\ Q = 6x^2y^2 - 5y^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u(x,y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + C(y) \\ u'_y = 6x^2y^2 + C'(y) = 6x^2y^2 - 5y^4 \Rightarrow C'(y) = -5y^4 \Rightarrow \end{array}$$

$$C(y) = -y^5 + C. \Rightarrow u(x,y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5 + C \Rightarrow$$

$$I = u(3;0) - u(-2;-1) = \frac{275}{5} + 7 = 55 + 7 = 62.$$

№4299 Найти $I = \oint\limits_C (x+y)dx - (x-y)dy$, где C – эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

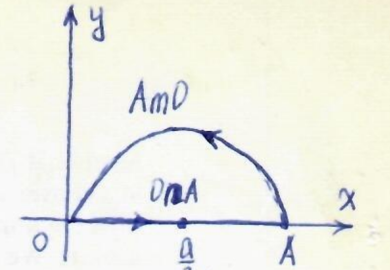
$$\begin{cases} P = x+y \\ Q = y-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \end{cases} \Rightarrow I = -2\iint\limits_{\Omega} dxdy = \left/ \begin{array}{ll} x = ar\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = br\sin\varphi, & 0 \le r \le 1 \end{array} \right/$$

$$= -2ab \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr = -4\pi ab \cdot \frac{1}{2} = -2\pi ab.$$

№4303. Найти $I = \int\limits_{AmO} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$,

где AmO – верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = ax$, пробегаемая от $A(a;0)$ до $O(0;0)$.

Пусть C — замкнутый контур, состоящий из дуги AmO и отрезка OnA. $\Rightarrow$



$$I = \oint_C (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy -$$

$$- \int_{OnA} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy = \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array}, 0 \le t \le a, \begin{array}{l} x'_t = 1 \\ y'_t = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \iint_{\Omega} (\cancel{e^x \cos y} - \cancel{e^x \cos y} + m)dxdy - \int_0^a 0\, dt = m \iint_{\Omega} dxdy = \frac{\pi m a^2}{8}. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} P = e^x \sin y - my \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - m \\ Q = e^x \cos y - m \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y \end{cases} \qquad I = \frac{\pi m a^2}{8}.$$

N4309. Вычислить площадь, ограниченную кривой:

$$x = a\cos^3 t, \ y = b\sin^3 t, \ 0 < t \le 2\pi.$$

$$x'_t = -3a\cos^2 t \sin t, \ y'_t = 3b \sin^2 t \cos t \Rightarrow S = \frac{1}{2}\oint_C \{x dy - y dx\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{a\cos^3 t \cdot 3b\sin^2 t \cos t + b\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t \sin t\} dt = \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, dt =$$

$$= \frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = \frac{3ab}{16}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 4t)dt = \frac{3ab}{16}\cdot 2\pi - \frac{3ab}{64}\overset{0}{\cancel{\sin 4t}}\Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi ab}{8}.$$

N4307 Вычислить $I = \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$,

где C — простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат, пробегаемый в положительном направлении.

ⓐ начало координат лежит вне контура C.

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \ Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

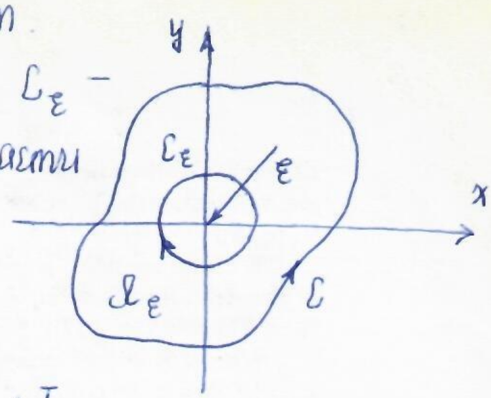
Функции P и Q определены всюду внутри контура C $\Rightarrow$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$I = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \equiv 0 \Rightarrow I = 0.$$

(б) контур C окружает начало координат.

Окружим начало координат контуром C_ε — окружностью радиуса ε. Поэтому в области $\mathcal{D}_\varepsilon$, ограниченной контурами C и C_ε функции P и Q определены. Поэтому



$$I = \oint\limits_{C\cup C_\varepsilon} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} - \oint\limits_{C_\varepsilon} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = I_1 + I_2.$$

В силу случая (а) $I_1 = \oint\limits_{C\cup C_\varepsilon} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \equiv 0 \Rightarrow$

$I = \oint\limits_{C_\varepsilon^+} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, где C_ε^+ — окружность радиуса ε, пробегаемая в положительном направлении $\Rightarrow \begin{cases} x = \varepsilon\cos\varphi, & x'_\varphi = -\varepsilon\sin\varphi \\ y = \varepsilon\sin\varphi, & y'_\varphi = \varepsilon\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow$

$$I = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\varepsilon\cos\varphi}{\varepsilon^2}\,\varepsilon\cos\varphi + \frac{\varepsilon\sin\varphi}{\varepsilon^2}\cdot\varepsilon\sin\varphi \right\} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \Rightarrow I = 2\pi.$$

4312 Вычислить S, ограниченную кривой $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $a>0$

Положим $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi \Rightarrow x^2 = a^2\cos^2\varphi\cos 2\varphi \Rightarrow \cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow$

$\varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ и $\varphi \in [\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}] \Rightarrow$ площадь удвоим.

Тогда $\begin{cases} x = a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}, & \varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}] \\ y = a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} \end{cases}$

$$x'_\varphi = -a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} - a\cos\varphi\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = -\frac{a\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$y'_\varphi = a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} - a\sin\varphi\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{a\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

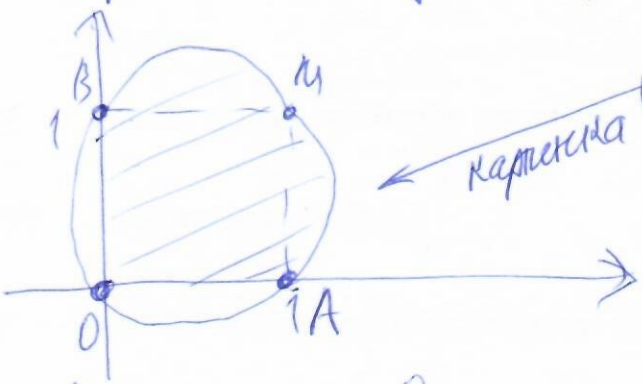
$$\underline{S} = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(a\cos\varphi\cancel{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot\frac{a\cos 3\varphi}{\cancel{\sqrt{\cos 2\varphi}}} + a\sin\varphi\cancel{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot\frac{a\sin 3\varphi}{\cancel{\sqrt{\cos 2\varphi}}} \right) d\varphi =$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\sin 2\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \underline{a^2}$$

№ 4313 Вычислить площадь области, ограниченную кривой

$$S = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

Кривая: $x^3+y^3=x^2+y^2$ и осями координат.



$$x^2(x-1)+y^2(y-1)=0$$

$$x=r\cos\varphi \quad y=r\sin\varphi$$

$$r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)=r^2$$

$$r=\frac{1}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$$

$$S=\frac{1}{2}\Big(\cancel{\oint_{OA}}^{\,0}+\oint_{AmB}+\cancel{\oint_{BO}}^{\,0}\Big)=\frac{1}{2}\oint_{AmB}\dots$$

$x=t$, $y=0$, $0\le t\le 1$ $\qquad$ $x=0$, $y=t$, $1\le t\le 0$

параметризация кривой
$$\begin{cases} x=\dfrac{\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi} \\[2mm] y=\dfrac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\end{cases} \quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

$$x'_\varphi=\frac{-\sin\varphi(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)-\cos\varphi(-3\cos^2\varphi\sin\varphi+3\sin^2\varphi\cos\varphi)}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=$$

$$=-\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}+\frac{3\cos^2\varphi\sin\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}$$

$$y'_\varphi=\frac{\cos\varphi(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)-\sin\varphi(-3\cos^2\varphi\sin\varphi+3\sin^2\varphi\cos\varphi)}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}=$$

$$=\frac{\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}+\frac{3\cos\varphi\sin^2\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}$$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big\{\frac{\cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}+\cancel{\frac{3\cos^2\varphi\sin^2\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^3}}-$$

$$+\frac{\sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}-\cancel{\frac{3\cos^2\varphi\sin^2\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^3}}\Big\}d\varphi=$$

-1

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{2\cos^2\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\cos 2\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} = \left|\varphi-\frac{\pi}{4}=\psi\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\cos^2\psi\left(1-\frac{1}{2}\cos 2\psi\right)^2} = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-tg^2\psi}{1+tg^2\psi}\right)^2}\frac{d\psi}{\cos^2\psi} =$$

$$= \left|u=tg\psi\right| = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{du}{\left(1-\frac{1}{2}\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{\frac{(2+2u^2-1+u^2)^2}{4(1+u^2)^2}} =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{(1+u^2)^2\,du}{(1+3u^2)^2} = \left|\begin{matrix}\sqrt{3}u=v\\ du=\frac{dv}{\sqrt{3}}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\left(1+\frac{v^2}{3}\right)^2}{(1+v^2)^2}\,dv = \frac{2}{9\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{(3+v^2)^2}{(1+v^2)^2}\,dv = \left|v=tg\gamma\right| =$$

$$= \frac{2}{9\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(3+tg^2\gamma)^2\cos^4\gamma\,d\gamma}{\cos^2\gamma} = \frac{2}{9\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\gamma\left(9+6tg^2\gamma+tg^4\gamma\right)d\gamma =$$

$$= \frac{2}{9\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(9\cos^2\gamma+6\sin^2\gamma+\frac{\sin^4\gamma}{\cos^2\gamma}\right)d\gamma = \frac{2}{9\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(6+3\cos^2\gamma+\frac{(1-\cos^2\gamma)^2}{\cos^2\gamma}\right)d\gamma$$

$$= \frac{2}{9\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(6+3\cos^2\gamma+\frac{1}{\cos^2\gamma}-2+\cos^2\gamma\right)d\gamma = \frac{2}{9\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4+4\cos^2\gamma+\frac{1}{\cos^2\gamma}\right)d\gamma$$

$$\cancel{= \frac{8}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{4}{9\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2\gamma)\, d\gamma}$$

$$= \frac{2}{9\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4 + 2(1+\cos 2\gamma) + \frac{1}{\cos^2\gamma}\right) d\gamma = \frac{2}{9\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(6 + 2\cos 2\gamma + \frac{1}{\cos^2\gamma}\right) d\gamma =$$

$$= \frac{2}{9\sqrt{3}} \left(6\gamma \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \sin 2\gamma \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \operatorname{tg}\gamma \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \right) =$$

$$= \frac{2}{9\sqrt{3}} \left(2\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \right) = \underline{\frac{4\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}}.$$

Дома: NN 4261, 4264, 4297, 4300, 4302, 4311, 4310

N4261 Найти $I = \int\limits_{(1;-1)}^{(1;1)} (x-y)(dx-dy)$

$P = (x-y) \qquad Q = (y-x) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$

$\begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases} \Rightarrow u'_x = x-y$

$u(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + C(y) \Rightarrow u'_y = -x + C'(y) = y - x \Rightarrow C'(y) = y \Rightarrow$

$C(y) = \frac{y^2}{2} + C \Rightarrow$

$u(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} + C$

$I = u(1;1) - u(1;-1) = \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) = -2. \Rightarrow I = -2.$

N4264. Найти $I = \int\limits_{(1;0)}^{(6;8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, вдоль путей, не проходящих через начало координат.

$P = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad Q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases} \Rightarrow u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C(y) \Rightarrow$

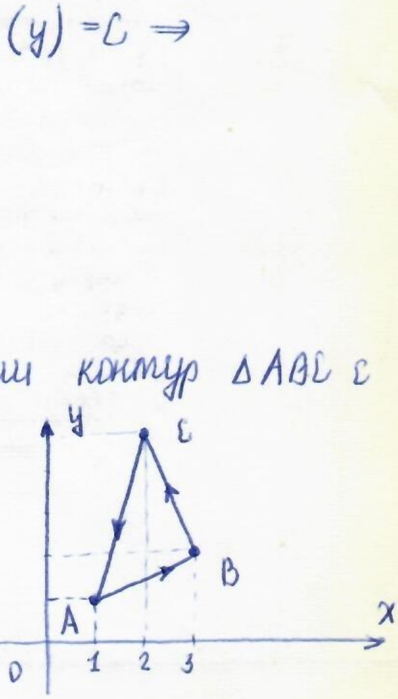
$\Rightarrow u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + C'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C \Rightarrow$

$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C.$

$I = u(6;8) - u(1;0) = 9. \Rightarrow I = 9.$

N4297 Найти $I = \oint\limits_K (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy$,

где K — пробегаемый в положительном направлении контур ΔABC с вершинами $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(2;5)$

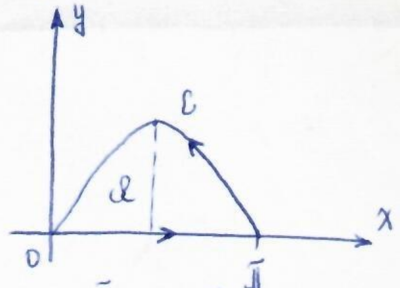


$P = (x+y)^2 \qquad Q = -(x^2+y^2) \Rightarrow$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(x+y) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \Rightarrow I = \iint (-4x-2y)\,dx\,dy =$

$= -2\int\limits_1^2 dx \int\limits_{y_{AB}(x)}^{y_{AC}(x)} (2x+y)\,dy - 2\int\limits_2^3 dx \int\limits_{y_{AB}(x)}^{y_{CB}(x)} (2x+y)\,dy = -46\frac{2}{3}.$

№4300 Найти $I = \oint\limits_C e^x\{(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy\}$, где C — пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0<x<\pi$, $0<y<\sin x$.



$$P = e^x(1-\cos y),\quad Q = -e^x(y-\sin y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x\sin y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x(y-\sin y) \Rightarrow$$

$$I = \iint\limits_D(-e^x y + \cancel{e^x\sin y} - \cancel{e^x\sin y})\,dxdy = -\iint\limits_D e^x y\,dxdy = -\int_0^\pi e^x dx\int_0^{\sin x} y\,dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\sin^2 x\,dx = -\frac{1}{4}\int_0^\pi(1-\cos 2x)e^x dx = -\frac{1}{4}\int_0^\pi e^x dx + \frac{1}{4}\int_0^\pi e^x\cos 2x\,dx = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int_0^\pi e^x dx = -\frac{1}{4}(e^\pi - 1).$$

$$\int e^x\cos 2x\,dx = \frac{e^x}{5}(2\sin 2x + \cos 2x) + C \Rightarrow \int_0^\pi e^x\cos 2x\,dx = \frac{1}{5}(e^\pi - 1) \Rightarrow$$

$$I_2 = \frac{1}{20}(e^\pi - 1) \Rightarrow I = -\frac{1}{4}(e^\pi-1) + \frac{1}{20}(e^\pi - 1) = -\frac{1}{5}(e^\pi - 1). \Rightarrow$$

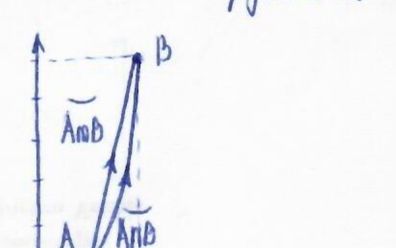
$$I = -\frac{1}{5}(e^\pi - 1).$$

№4302. Найти $I_1 = \int\limits_{AmB}(x+y)^2dx - (x-y)^2dy$ и $I_2 = \int\limits_{AnB}(x+y)^2dx - (x-y)^2dy$,

где AmB — прямая, соединяющая точки $A(1;1)$ и $B(2;6)$,

AnB — парабола, проходящая через точки A, B и начало координат.

Уравнение AmB: $y = 5x-4 \Rightarrow$



$$I_1 = \left/\begin{matrix} x=t \\ y=5t-4 \end{matrix},\ 1\le t\le 2,\ \begin{matrix} x'_t = 1 \\ y'_t = 5\end{matrix}\right/ =$$

$$= \int_1^2\{(6t-4)^2 - 5(4t-4)^2\}dt =$$

$$= \int_1^2(-44t^2 + 112t - 64)dt = \frac{-44\cdot 7 + 56\cdot 9 - 64\cdot 3}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$I_2 = \left/\begin{matrix} x=t \\ y=2t^2-t \end{matrix},\ 1\le t\le 2,\ \begin{matrix} x'_t = 1 \\ y'_t = 4t\end{matrix}\right/ = \int_1^2\{4t^4 - 4(t^2-t)^2(4t-1)\}dt =$$

$$= 4\int_1^2 \left\{ t^4 - (t^2-t)^2(4t-1)\right\} dt = 4\int_1^2\left\{-4t^5+10t^4-6t^3+t^2\right\}dt =$$

$$= 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3} \Rightarrow I_1 = \frac{4}{3},\ I_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow I_1 - I_2 = 2.$$

№4311 Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$$x^3+y^3=3axy,\ a>0.$$

$$y = tx,\quad t\in[0;+\infty) \Rightarrow x(1+t^3)=3at \Rightarrow x=\frac{3at}{1+t^3}\Rightarrow$$

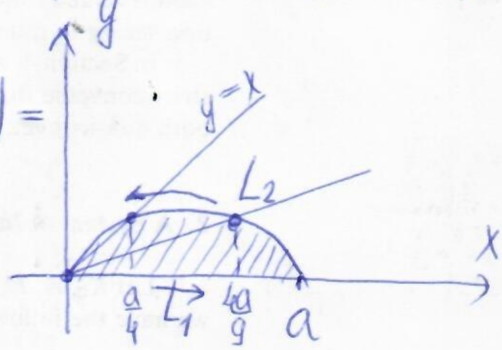
$$\begin{cases} y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \\ x = \dfrac{3at}{1+t^3} \end{cases},\ t\in[0;+\infty) \Rightarrow \begin{cases} x'_t = 3a\cdot\dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \\ y'_t = 3a\cdot\dfrac{2t-t^4}{(1+t^3)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx) = \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\left\{\frac{t(2t-t^4)}{(1+t^3)^3} - \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\right\}dt =$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2} = -\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{1+t^3}\Big|_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}. \Rightarrow S = \frac{3a^2}{2}.$$

4310 Вычислить площадь S, ограниченную параболой $(x+y)^2=ax$, $a>0$ и осью OX.

$$S = \frac{1}{2}\oint_C (xdy-ydx) = \frac{1}{2}\oint_{L_1\cup L_2}(xdy-ydx) =$$



$$x = r\cos^2\varphi,\ y = r\sin^2\varphi \Rightarrow$$

$$r^2 = ar\cos^2\varphi \Rightarrow r = a\cos^2\varphi \Rightarrow$$

$$x = a\cos^4\varphi = \frac{a(1+\cos 2\varphi)^2}{4};\quad y = a\cos^2\varphi\sin^2\varphi = \frac{a\sin^2 2\varphi}{4}$$

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

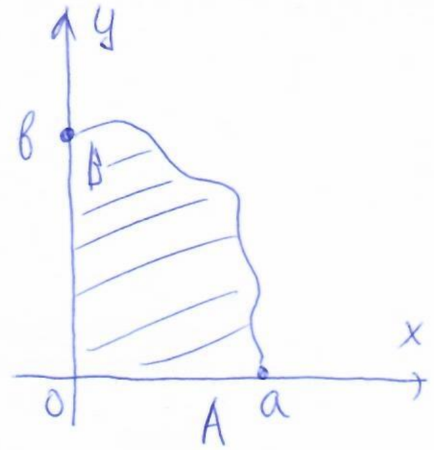
$$= \left| \text{на } L_1\ y=0 \right| = \frac{1}{2}\oint_{L_2}(xdy-ydx) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a(1+\cos 2\varphi)^2}{4}\cdot\frac{a\,2\sin 2\varphi\cdot 2\cos 2\varphi}{4} + \right.$$

$$+\ \frac{a\sin^2 2\varphi}{4}\cdot\frac{\cancel{2}a(1+\cos2\varphi)\cdot\cancel{2}\sin2\varphi}{\cancel{4}}\Big)d\varphi=\frac{a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\big((1+\cos2\varphi)^2\cos2\varphi\sin2\varphi+$$

$$+\ \sin^3 2\varphi(1+\cos2\varphi)\Big)d\varphi=\frac{a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\varphi)\sin2\varphi(\cos2\varphi+\cos^2 2\varphi+\sin^2 2\varphi)d\varphi$$

$$=-\frac{a^2}{8\cdot2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\varphi)^2d(1+\cos2\varphi)=-\frac{a^2}{48}(1+\cos2\varphi)^3\Big|_0^{\pi/2}=\frac{a^2}{6}$$

4315 Вычислить площадь области, ограниченную кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1$ и осями координат



$$x=a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi,\quad y=b\sin^{\frac{2}{n}}\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

$$x'_\varphi=-\frac{2a}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin\varphi$$

$$y'_\varphi=\frac{2b}{n}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos\varphi$$

$$S=\frac12\int\limits_{OABO}x\,dy-y\,dx=\cancel{\frac12\int\limits_{OA}\dots}^{\,0}+\frac12\int\limits_{AB}\dots+\cancel{\frac12\int\limits_{BO}\dots}^{\,0}=\frac12\int\limits_{AB}x\,dy-y\,dx=$$

$$=\frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\cdot\frac{2b}{n}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos\varphi+b\sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cdot\frac{2a}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cdot\sin\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{ab}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^{\frac{2}{n}+1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi+\sin^{\frac{2}{n}+1}\varphi\cdot\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{ab}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cdot\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\,d\varphi=\frac{ab}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\varphi)^{\frac{1}{n}-1}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\,d(\sin\varphi)=$$

$$=\left|t=\sin\varphi\right|=\frac{ab}{n}\int_0^1(1-t^2)^{\frac{1}{n}-1}t^{\frac{2}{n}-1}dt=\left|t^2=u,\ t=u^{\frac12},\ dt=\frac12u^{-\frac12}du\right|$$

$$=\frac{ab}{2n}\int_0^1(1-u)^{\frac1n-1}u^{\frac12\left(\frac2n-1\right)-\frac12}du=\frac{ab}{2n}\int_0^1(1-u)^{\frac1n-1}\cdot u^{\frac1n-1}du=$$

$$=\underline{\frac{ab}{2n}B\left(\frac1n,\frac1n\right)}.$$